Αλγεβρικές Δομές I (2018-2019)

Φροντιστηριακές ασκήσεις #9

1. Δείξτε ότι τα επόμενα σύνολα μαζί με τις αναφερόμενες πράξεις αποτελούν δακτυλίους:

   (1) $R = \{m/n \in \mathbf{Q} \mid m, n \in \mathbf{Z},\ n$ περιττός$\}$ μαζί με τις συνήθεις πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού των ρητών αριθμών.

   (2) $R = \{m/2^k \in \mathbf{Q} \mid m, k \in \mathbf{Z}\}$ μαζί με τις συνήθεις πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού των ρητών αριθμών.

   (3) $R = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$ μαζί με τις συνήθεις πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού των πραγματικών αριθμών.

   (4) $R = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{2}\sqrt{3} \mid a, b, c, d \in \mathbf{Q}\}$ μαζί με τις συνήθεις πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού των πραγματικών αριθμών.

   (5) $R = \{a + bi \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$ όπου $i^2 = -1$, μαζί με τις συνήθεις πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού των μιγαδικών αριθμών.

2. Να δειχθεί ότι το σύνολο μιγαδικών 2×2 πινάκων

$$\mathbb{H} = \{ \begin{pmatrix} a & c \\ -\bar{c} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, c \in \mathbf{C}\}$$

   με τις συνήθεις πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού πινάκων αποτελεί ένα δακτύλιο διαίρεσης. Ο δακτύλιος $\mathbb{H}$ καλείται ο δακτύλιος διαίρεσης των τετρανίων του Hamilton.

3. Έστω $(R, +, \cdot)$ ένας δακτύλιος. Να δείξετε ότι το υποσύνολο

$$Z(R) = \{r \in R \mid r \cdot x = x \cdot r,\ \ \forall x \in R\}$$

   είναι ένας υποδακτύλιος του R. Ο υποδακτύλιος $Z(R)$ καλείται κέντρο του δακτυλίου R. Για $n \geq 2$ βρείτε το κέντρο του δακτυλίου $\mathbf{R}^{n \times n}$ των $n \times n$ πραγματικών πινάκων.

4. Να προσδιοριστούν όλοι οι διαιρέτες του μηδενός των επόμενων δακτυλίων:

   (1) $\mathbf{Z}_4$, (2) $\mathbf{Z}_5$, (3) $\mathbf{Z}_6$, (4) $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_4$, (5) $\mathbf{R}^{2\times 2}$.

5. Να προσδιοριστούν τα αντιστρέψιμα στοιχεία των επόμενων δακτυλίων:

   (1) $\mathbf{Z}_{10}$, (2) $\mathbf{Z}_{11}$, (3) $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_4$, (4) $\mathbf{R}^{2\times 2}$, (5) $\mathbb{H}$.

6. Έστω R πεπερασμένος δακτύλιος με μονάδα 1_R και τουλάχιστον δύο στοιχεία. Υποθέτουμε ότι αν $a, b \in R \setminus \{0\}$ τότε $a \cdot b \neq 0$. Δείξτε ότι ο R είναι δακτύλιος διαίρεσης.

7. Έστω R πεπερασμένη ακέραια περιοχή. Δείξτε ότι ο R είναι σώμα.